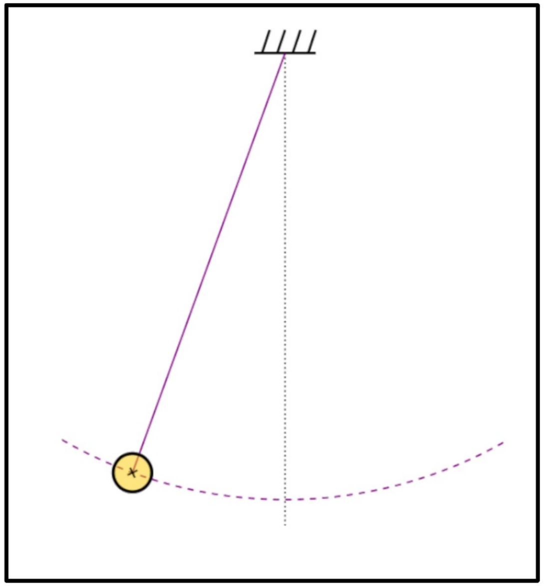
Bestimmung der Fallbeschleunigung mittles Pendel

- Diese Masse bewegt sich gleichförmig auf einer Kreisbahn.

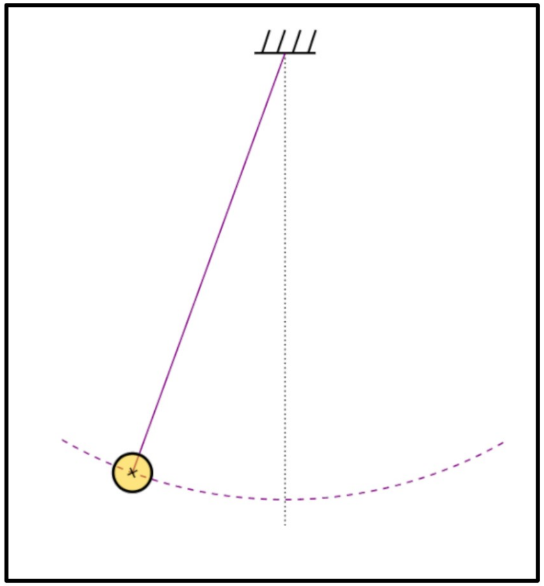


Roger Wolf

13. März 2020

Bestimmung der Fallbeschleunigung mittles Pendel

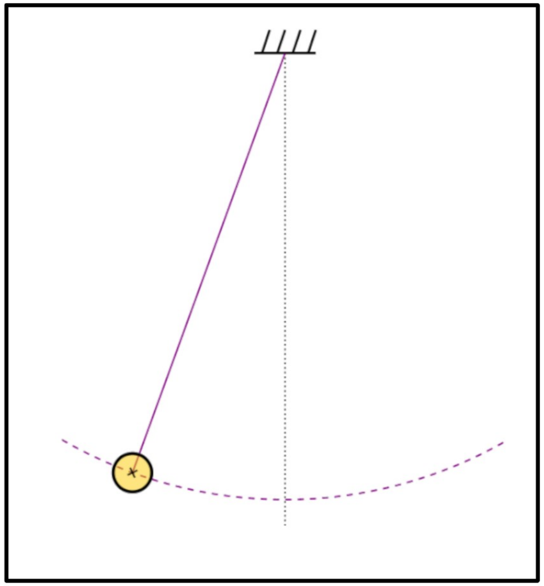
- Diese Masse bewegt sich gleichförmig auf einer Kreisbahn.
- Wie verändert sich die Schwingungs-periode, wenn Sie die Fadenlänge verdoppeln?



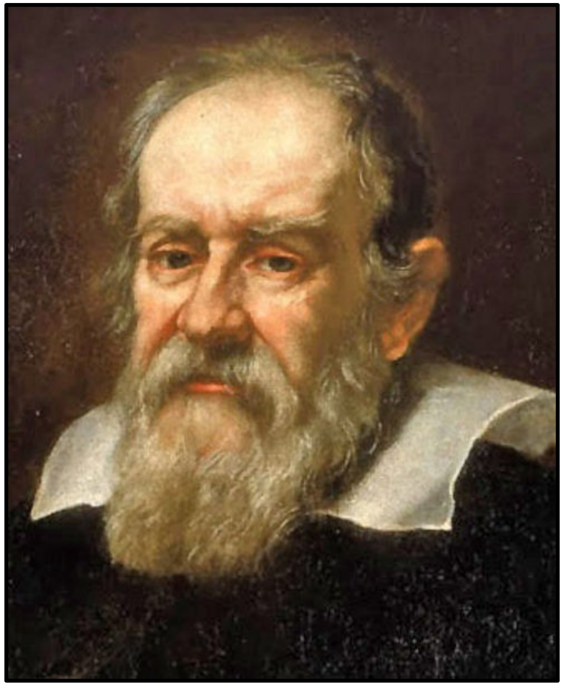
Roger Wolf
13. März 2020

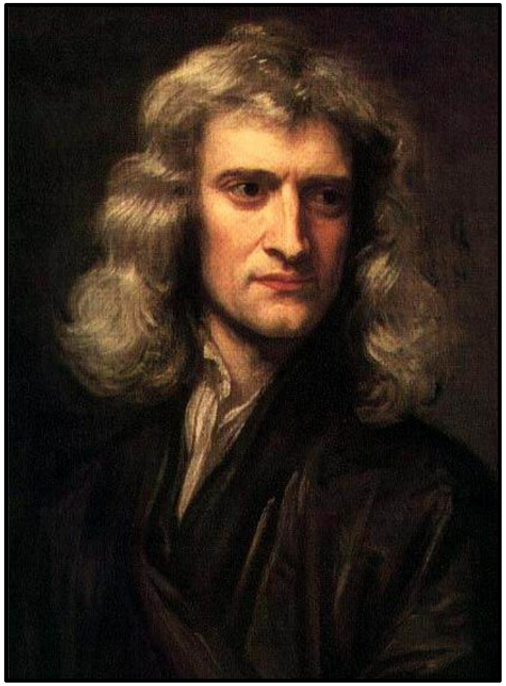
Bestimmung der Fallbeschleunigung mittles Pendel

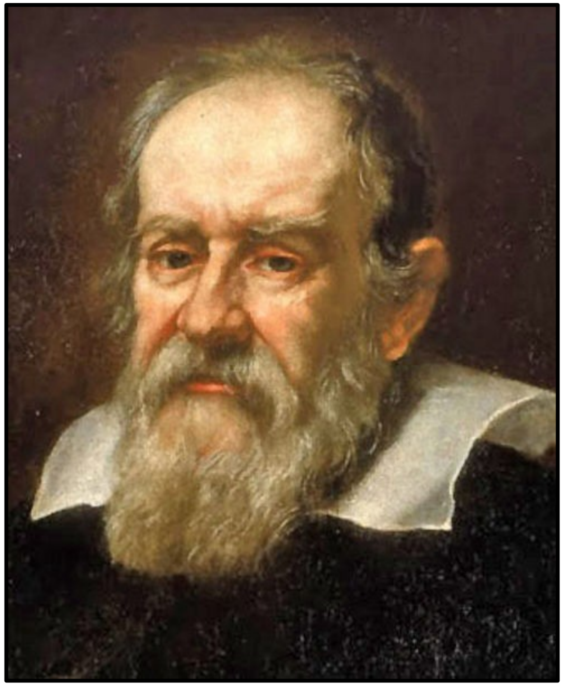
- Diese Masse bewegt sich gleichförmig auf einer Kreisbahn.
- Wie verändert sich die Schwingungs-periode, wenn Sie die Fadenlänge verdoppeln?
- Wie verändert sich die Schwingungs-periode, wenn Sie die Masse verdoppeln?



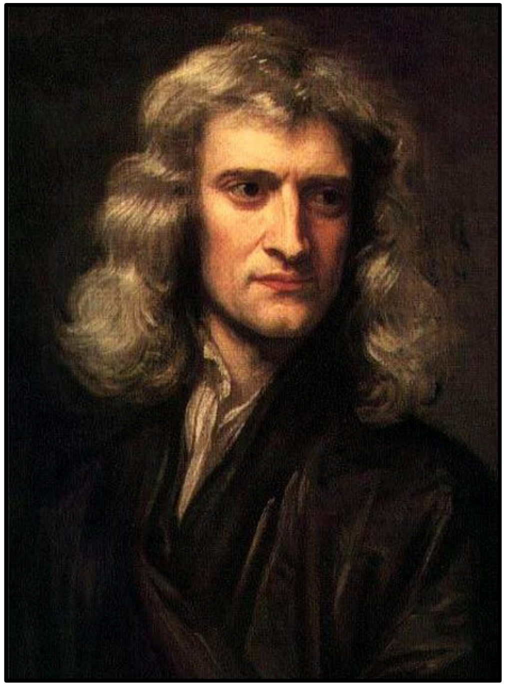
Roger Wolf
13. März 2020







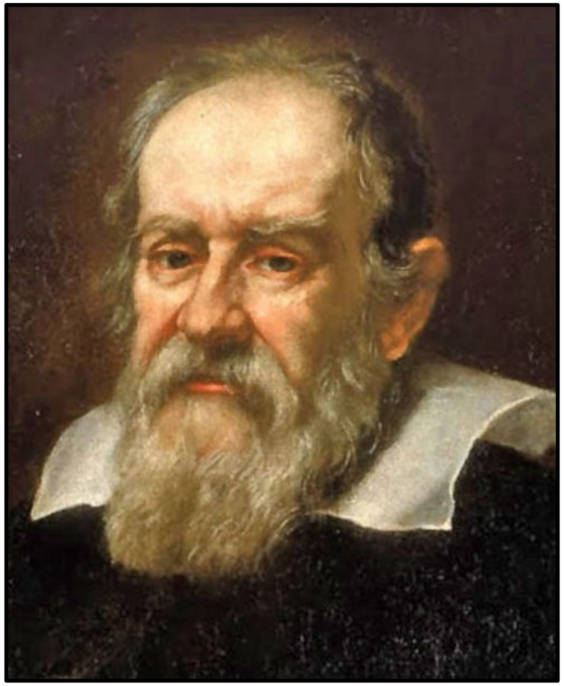
Gallileo Gallilei
(* 15.02.1564, † 08.01.1642)



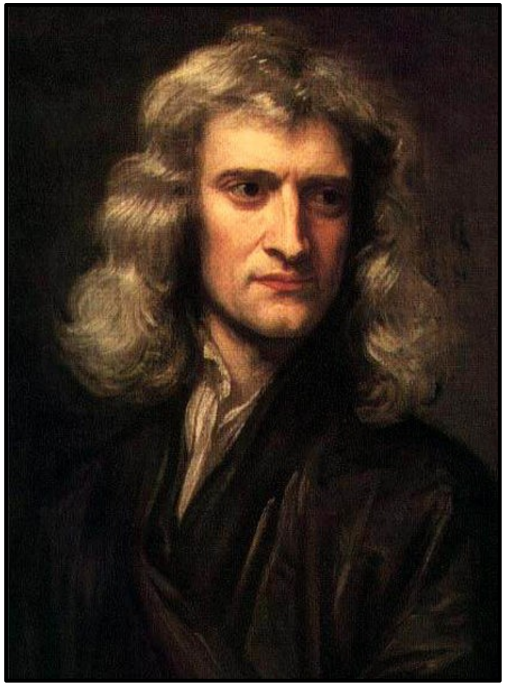
Isaak Newton
(* 04.01.1642, † 31.03.1727)

Physik ↔ Mathematik

- Noch zu Gallileis Zeiten wurden physikalische Vorgänge oftmals über viele Seiten hinweg, zumeist in der **Sprache der Gelehrten**, Latein, umschrieben:



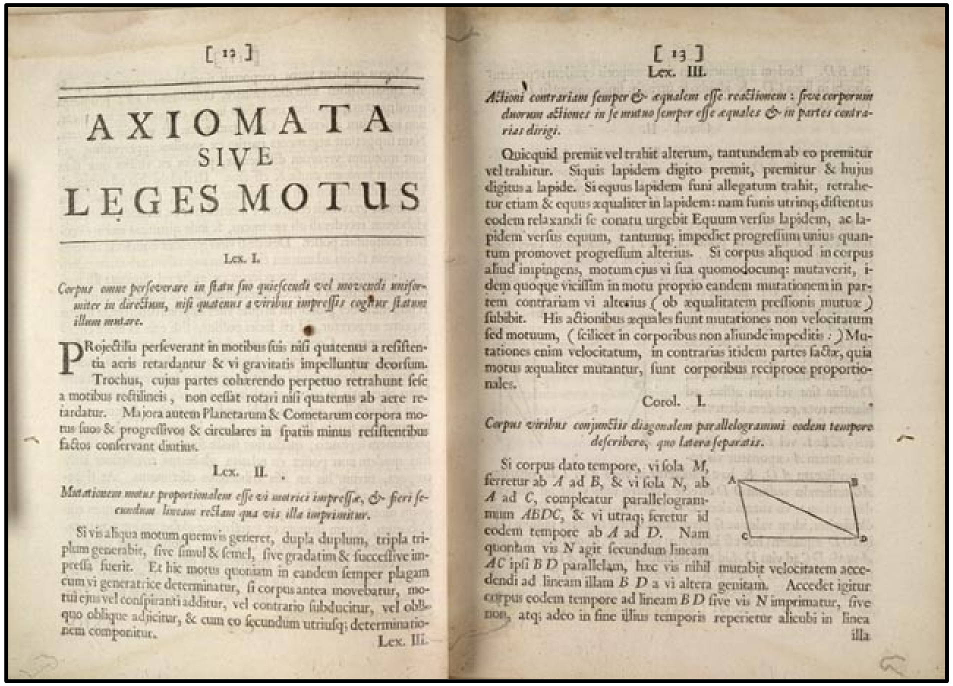
Gallileo Gallilei
(* 15.02.1564, † 08.01.1642)



Isaak Newton
(* 04.01.1642, † 31.03.1727)

- Seither wurden physikalische Zusammenhänge zunehmend und sehr erfolgreich in der **Sprache der Mathematik** formuliert und verstanden.

Newtonsche Axiome



[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

[13]

Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq; mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.

Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.

- **I. Newtonsches Axiom:**
  Ein Körper auf den keine äußeren Kräfte wirken verharrt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung.

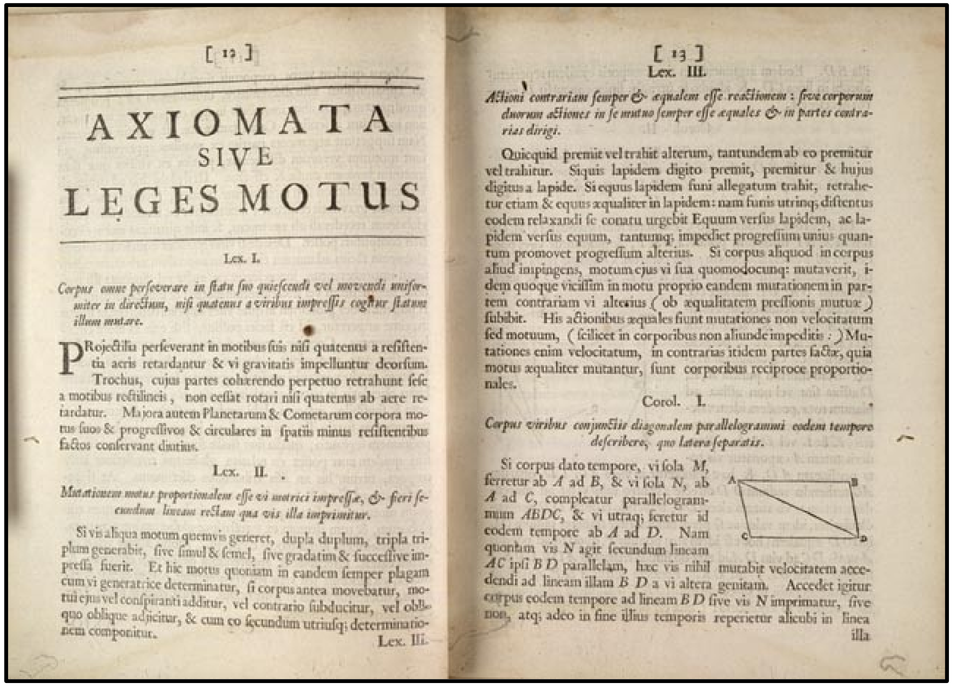
- **II. Newtonsches Axiom:**
  Eine Änderung dieses Bewegungs-zustandes erfordert eine Kraft:

  $$m\,a = F$$

- **III. Newtonsches Axiom:**
  Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht immer mit einer gleichgroßen aber entgegengesetzten Kraft von Körper B auf Körper A einher:

  $$F_{A\rightarrow B} = -F_{B\rightarrow A}$$

Newtonsche Axiome



[12]

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

PRojectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

[13]

Lex. III.

Actioni contrariam semper & aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus aequaliter in lapidem: nam funis utrinq; distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumq; impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunq; mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob aequalitatem pressionis mutuae) subibit. His actionibus aequales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factae, quia motus aequaliter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola M, ferretur ab A ad B, & vi sola N, ab A ad C, compleatur parallelogrammum $ABDC$, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab A ad D. Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, haec vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD sive vis N imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.

- **I. Newtonsches Axiom:**
  Ein Körper auf den keine äußeren Kräfte wirken verharrt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung.

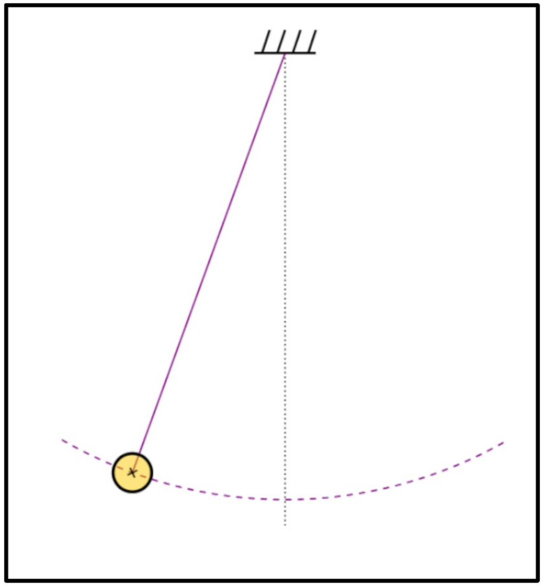
- **II. Newtonsches Axiom:**
  Eine Änderung dieses Bewegungs-zustandes erfordert eine Kraft:
  $$m\,a = F$$

- **III. Newtonsches Axiom:**
  Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht immer mit einer gleichgroßen aber entgegengesetzten Kraft von Körper B auf Körper A einher:
  $$F_{A\rightarrow B} = -F_{B\rightarrow A}$$

- Fundamentale physikalische Beobachtungen <u>von bemerkenswerter Tiefe</u>. Sie versinnbildlichen den Übergang zu einer mathematischen Beschreibung der Welt.

Pendelbewegung → Sprache der Mathematik

- Die Masse dieses Pendels bewegt sich auf einer Kreisbahn, mit festem Radius r.
- Diese Bewegung kann allein durch die Änderung des Winkels $\phi(t)$ als Funktion der Zeit beschrieben werden.

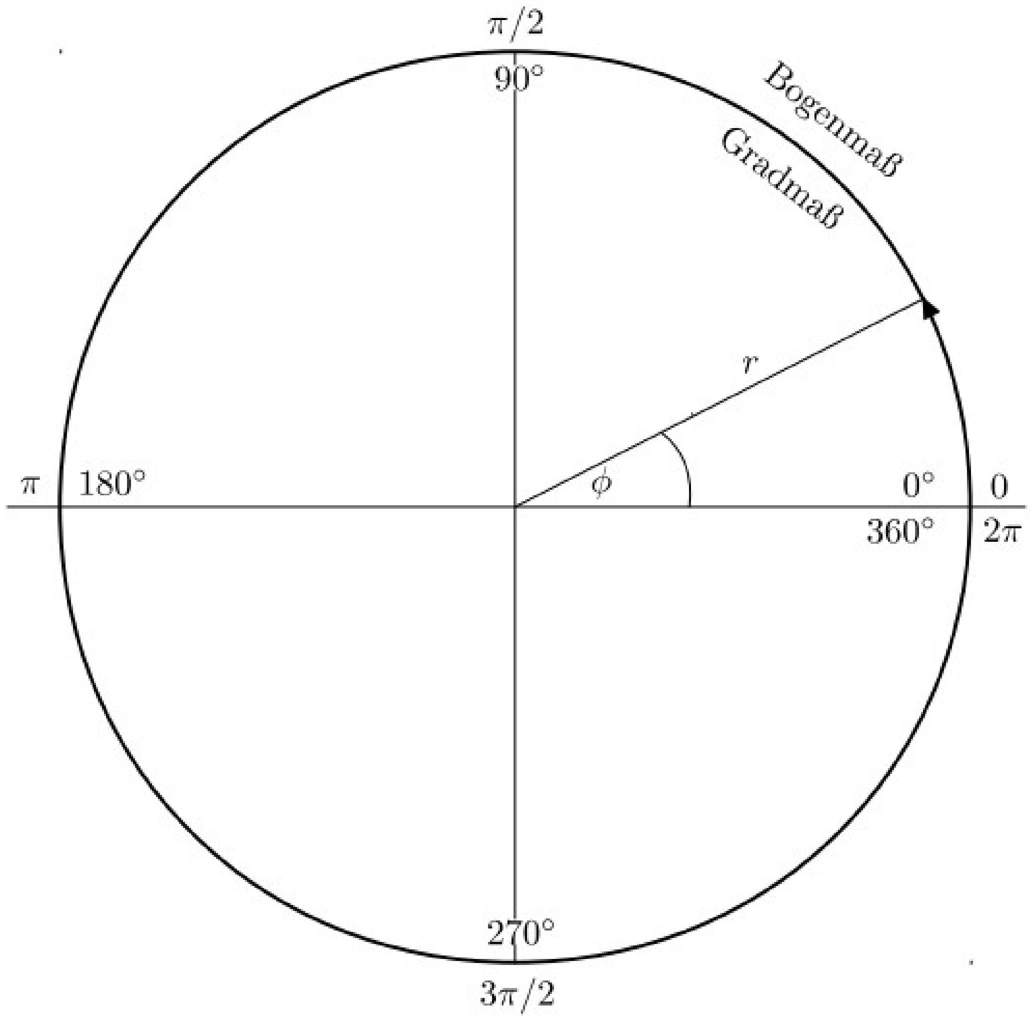


Winkelmessung im Bogenmaß

- Umfang eines Kreises mit Radius r:

$$\boxed{U = 2\pi\, r}$$

(Vollwinkel im Bogenmaß)



- Übersetzung:

Vollkreis	Gradmaß	Bogenmaß
0	0°	0
¼	90°	$^1/_2\,\pi$
½	180°	π
¾	270°	$^3/_2\,\pi$
1	360°	2π

Winkelgeschwindigkeit

- Wir erfassen periodische (Kreis-) Bewegungen mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}$$

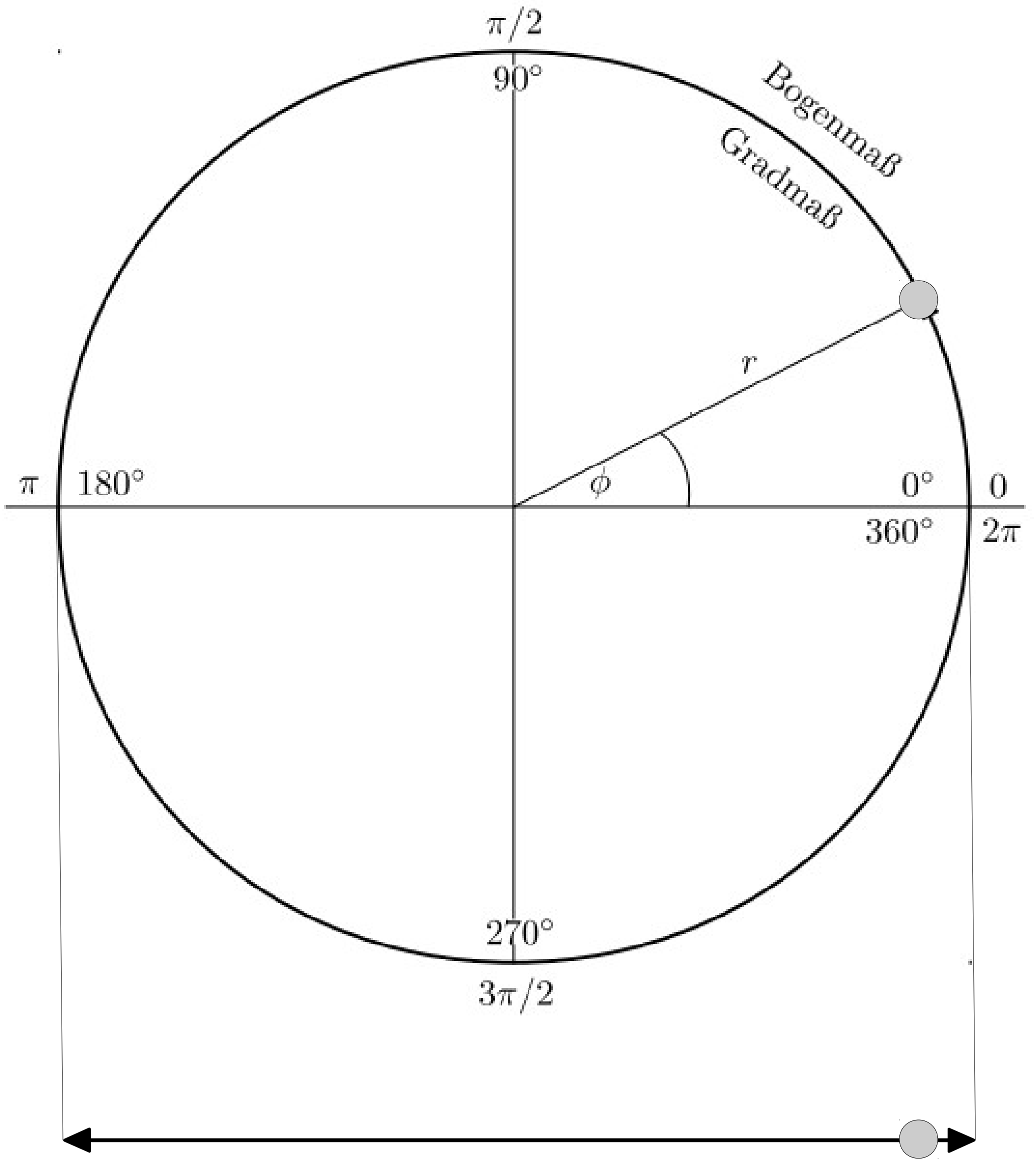
$$\left.\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{T} \\ &= 2\pi f \end{aligned}\right\} \text{Bei gleichförmiger Bewegung}$$

ϕ : Winkel

ω : Winkelgeschwindigkeit

T : Periode

f : Frequenz



Winkelgeschwindigkeit

- Wir erfassen periodische (Kreis-) Bewegungen mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ω :

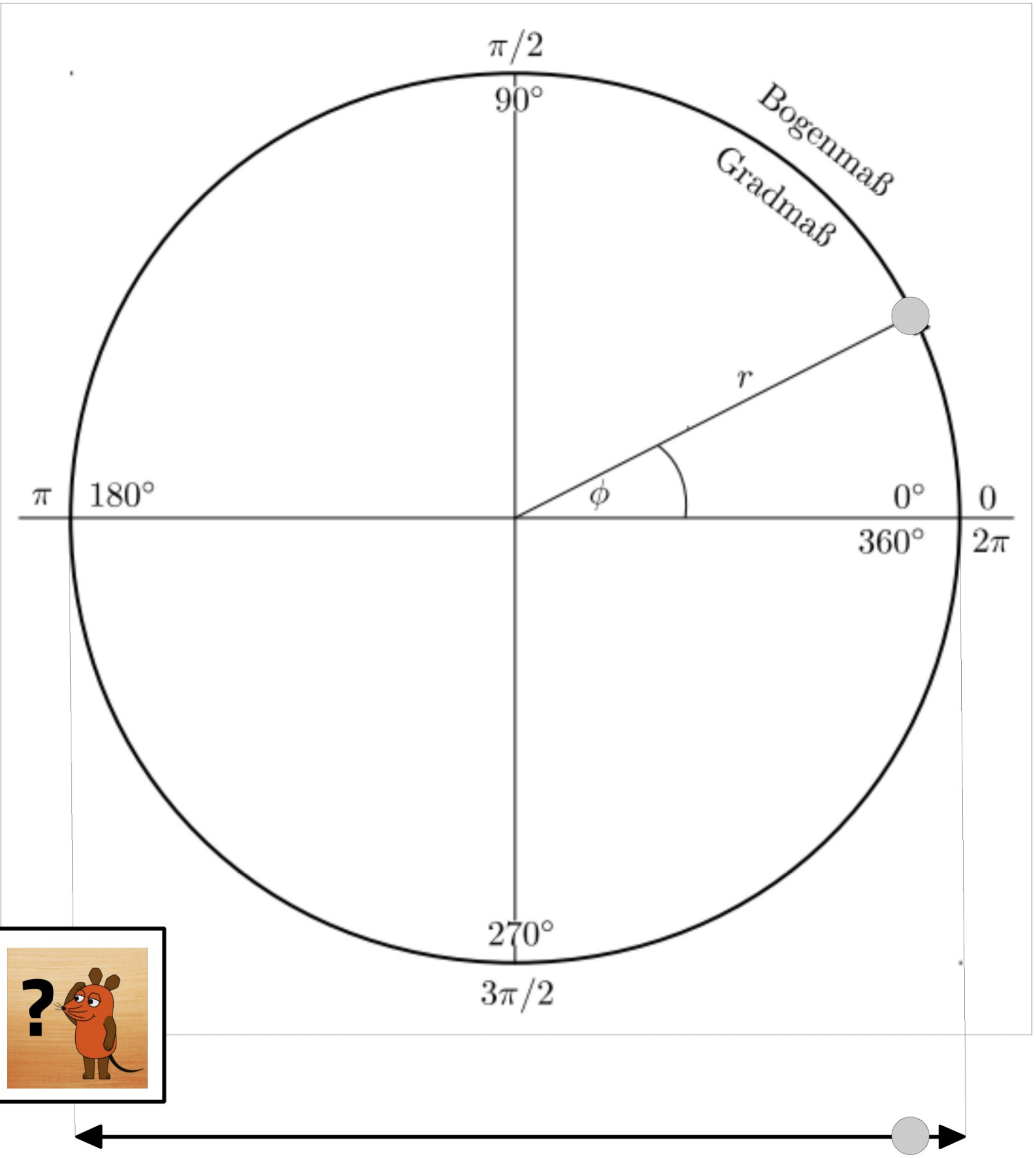
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi} \\ &= \frac{2\pi}{T} \\ &= 2\pi f \end{aligned} \quad \left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\\a\end{aligned}}\right\} \text{Bei gleichförmiger Bewegung}$$

ϕ : Winkel

ω : Winkelgeschwindigkeit

T : Periode

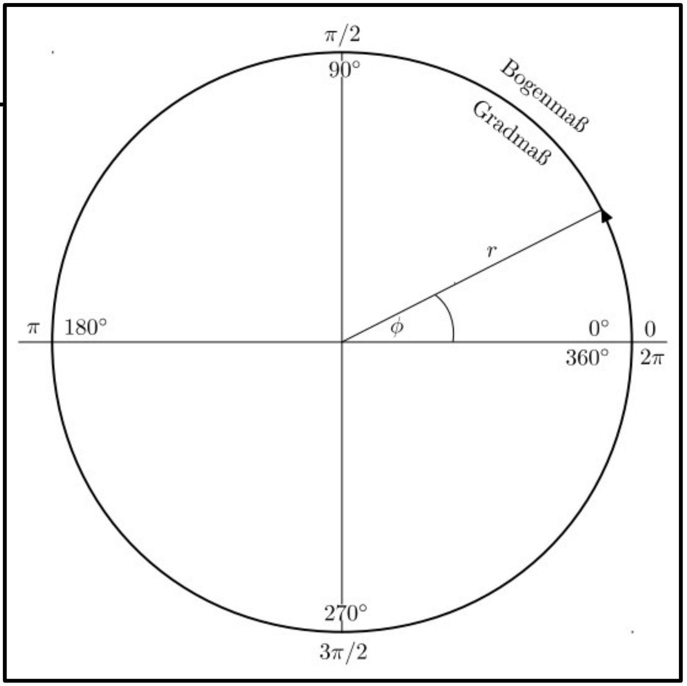
f : Frequenz



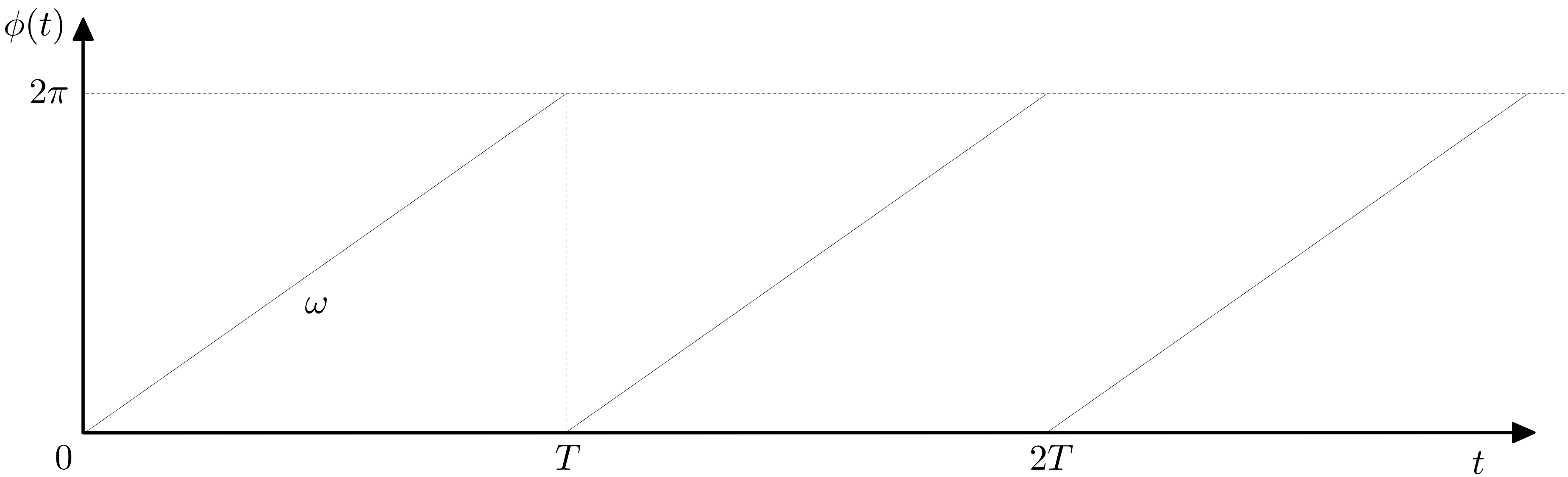
Wie sieht eine gleichförmige Kreisbewegung ausgedrückt durch $\phi(t)$ aus?

Winkelgeschwindigkeit

- Wie sieht eine gleichförmige Kreisbewegung ausgedrückt durch $\phi(t)$ aus?



$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi} \\
&\left.\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{T} \\ &= 2\pi f \end{aligned}\right\} \text{Bei gleichförmiger Bewegung}
\end{aligned}
$$



Priv. Doz. Dr. Roger Wolf
http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/

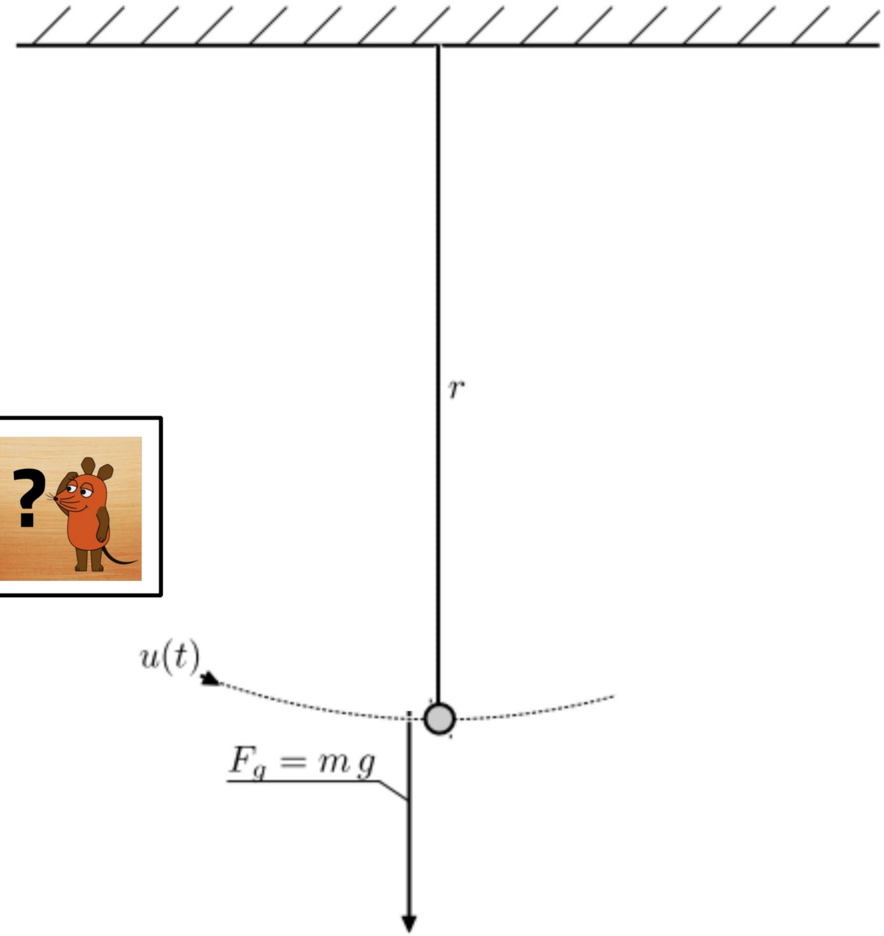
Das mathematische Pendel – Fall-1 –

- Wir erfassen die periodische Pendelbewegung mit Hilfe von ϕ und ω:

  - **II. Newtonsches Axiom:**

$$\boxed{m\,a = F}$$

Was für eine Bewegung erwarten Sie und warum?



Das mathematische Pendel – Fall-1 –

- Wir erfassen die periodische Pendelbewegung mit Hilfe von ϕ und ω:

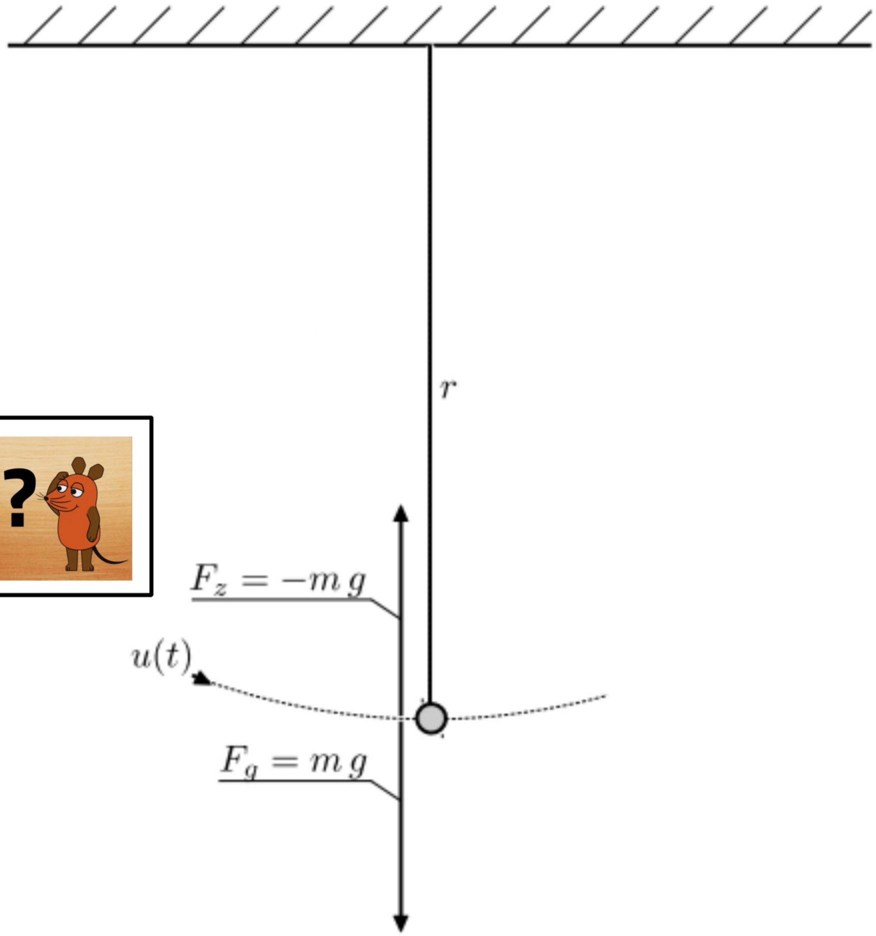
  - **II. Newtonsches Axiom:**

$$\boxed{m\,a = F}$$

Was für eine Bewegung erwarten Sie und warum?

  - **III. Newtonsches Axiom:**

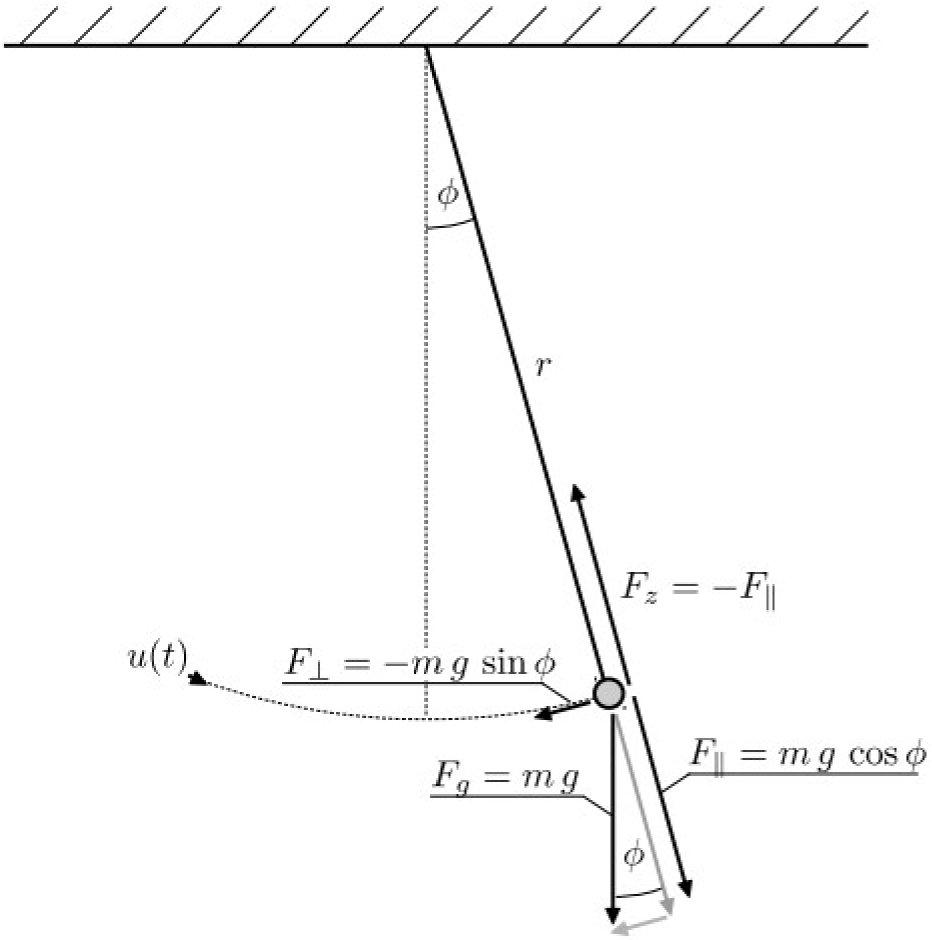
$$F = F_g + F_z = 0$$



Das mathematische Pendel – Fall-2 –

- **II. Newtonsches Axiom:**

$$\boxed{m\,a = F}$$



Zerlegung von F_g in eine *radiale* ($F_{\|}$) und eine *tangentiale* ($F_{\perp}$) Komponente.

Das mathematische Pendel – Fall-2 –

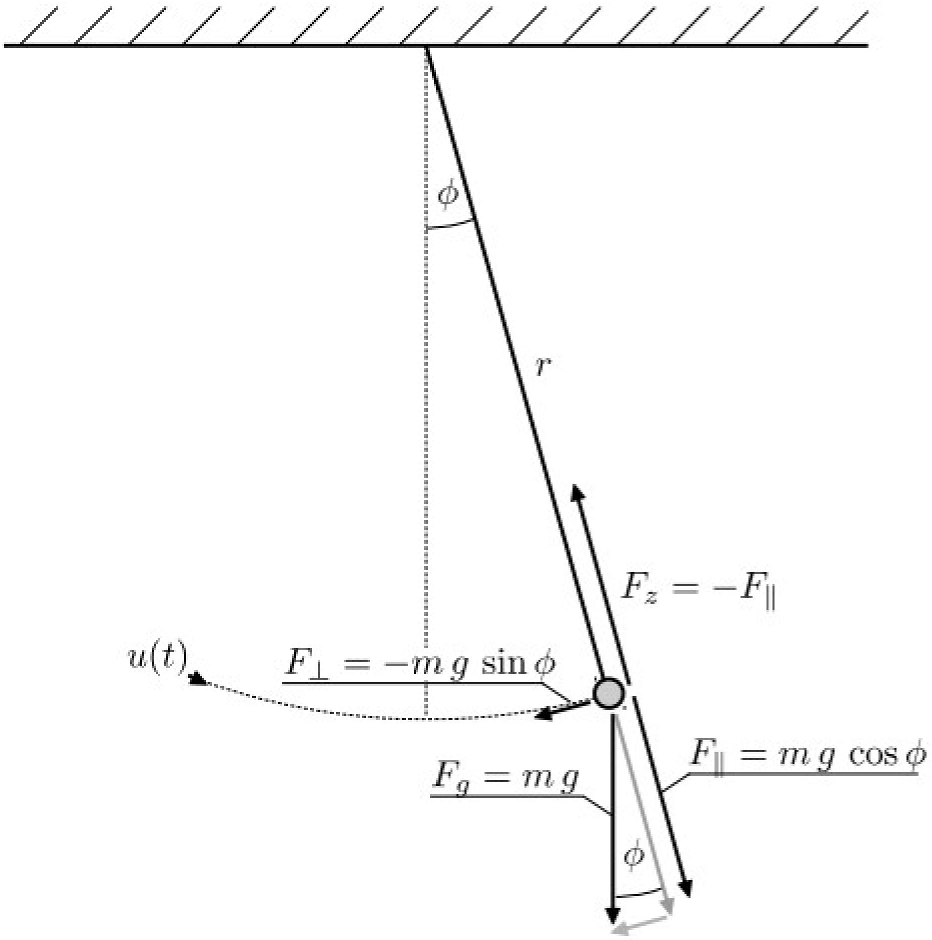
- **II. Newtonsches Axiom:**

$$\boxed{m\,a = F}$$

$$F = \cancel{F_{\parallel}} + \cancel{F_z} + F_{\perp}$$

$$F_{\perp} = -m\,g\,\sin\phi$$

$$F_{\perp} \approx -m\,g\,\phi$$



Zerlegung von F_g in eine *radiale* ($F_{\parallel}$) und eine *tangentiale* ($F_{\perp}$) Komponente.

Priv. Doz. Dr. Roger Wolf
http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/

Das mathematische Pendel – Fall-2 –

- **II. Newtonsches Axiom:**

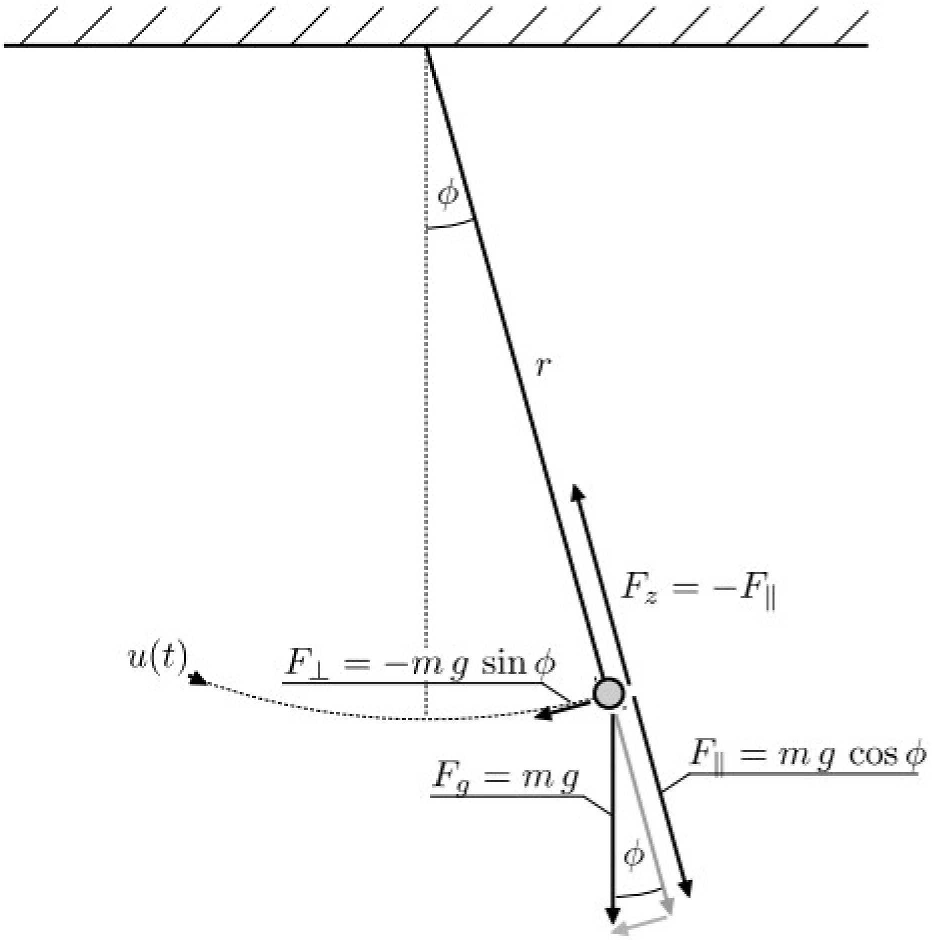
$$\boxed{m\,a = F}$$

$$a = \ddot{u} \qquad\qquad F = \cancel{F_{\parallel}} + \cancel{F_z} + F_{\perp}$$

$$u = r\,\phi \qquad\qquad F_{\perp} = -m\,g\,\sin\phi$$

$$\dot{u} = r\,\dot{\phi} \qquad\qquad F_{\perp} \approx -m\,g\,\phi$$

$$\ddot{u} = r\,\ddot{\phi}$$



Zerlegung von F_g in eine *radiale* ($F_{\parallel}$) und eine *tangentiale* ($F_{\perp}$) Komponente.

Priv. Doz. Dr. Roger Wolf
http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/

Das mathematische Pendel – Fall-2 –

- **II. Newtonsches Axiom:**

$$\boxed{m\,a = F}$$

$$a = \ddot{u} \qquad\qquad F = \cancel{F_{\parallel}} + \cancel{F_z} + F_{\perp}$$

$$u = r\,\phi \qquad\qquad F_{\perp} = -m\,g\,\sin\phi$$

$$\dot{u} = r\,\dot{\phi} \qquad\qquad F_{\perp} \approx -m\,g\,\phi$$

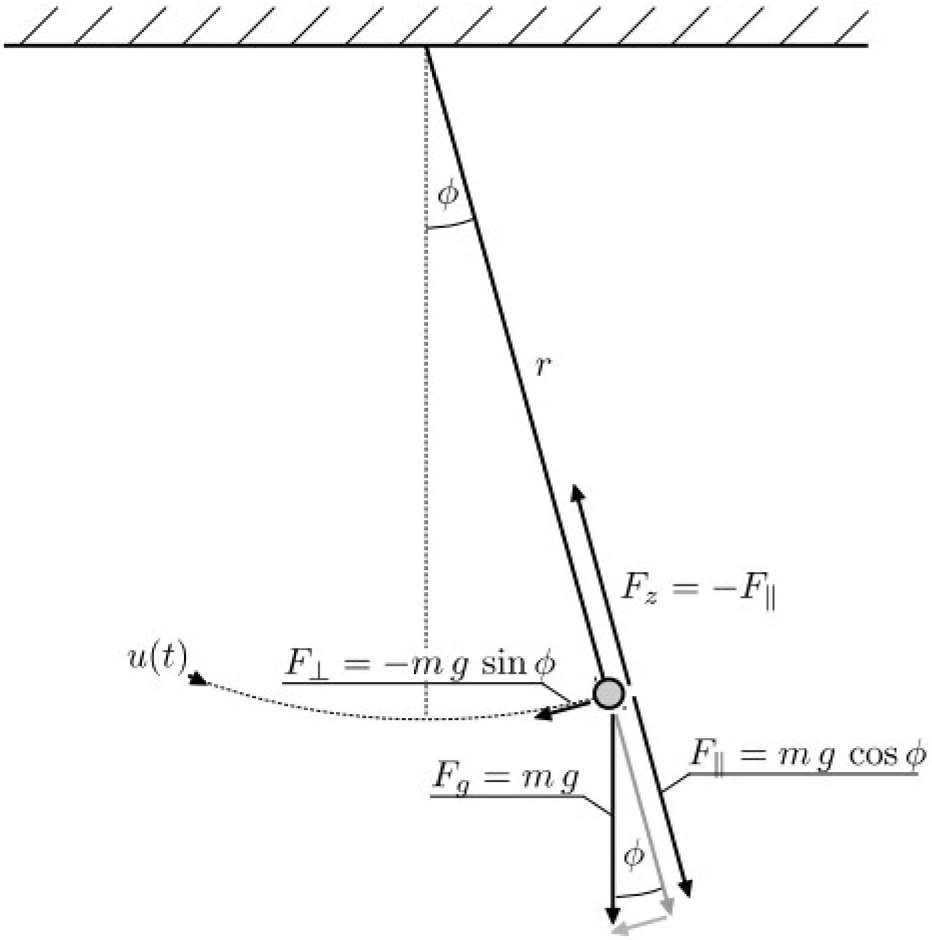
$$\ddot{u} = r\,\ddot{\phi}$$

- Mathematische Formulierung:

$$\cancel{m}\,r\,\ddot{\phi} = -\cancel{m}\,g\,\phi$$

$$r\,\ddot{\phi} = -\;\;g\,\phi$$

- **Aufgabe:** Suche nach einer math. Funktion die zu ihrer 2. Ableitung nach der Zeit proportional ist.



Zerlegung von F_g in eine *radiale* ($F_{\parallel}$) und eine *tangentiale* ($F_{\perp}$) Komponente.

Priv. Doz. Dr. Roger Wolf
http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/

Das mathematische Pendel – Fall-2 –

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_0\sin(\omega\,t)\\ \dot{\phi}(t) &= \phi_0\cos(\omega\,t)\cdot\omega\\ \ddot{\phi}(t) &= -\phi_0\sin(\omega\,t)\cdot\omega^2\end{aligned}$$

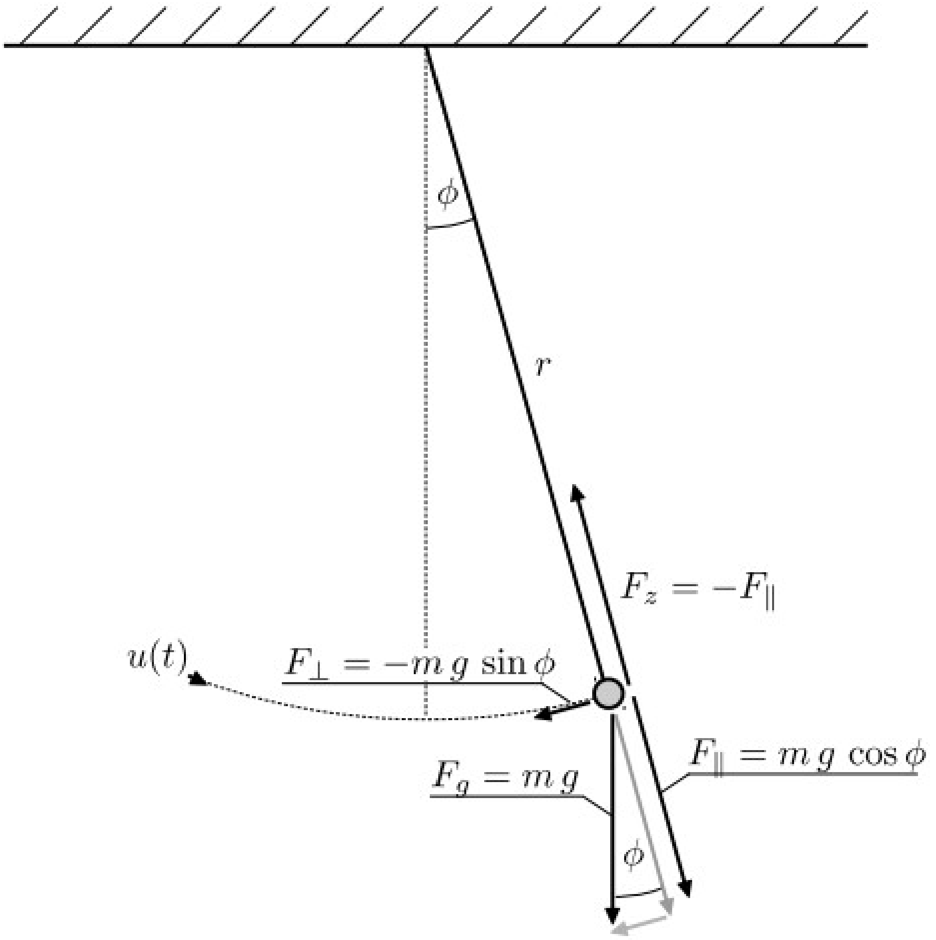
$$\boxed{r\,\ddot{\phi}(t) = -g\,\phi(t)} \quad (1)$$

- eingesetzt in (1):

$$r\Big(-\phi_0\sin(\omega\,t)\cdot\omega^2\Big) = -g\Big(\phi_0\sin(\omega\,t)\Big)\,;$$

$$\omega^2\,r\Big(-\phi_0\sin(\omega\,t)\Big) = g\Big(-\phi_0\sin(\omega\,t)\Big)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi}{T}}$$



Zerlegung von F_g in eine *radiale* ($F_{\|}$) und eine *tangentiale* ($F_{\perp}$) Komponente.

Messung der Erdbeschleunigung mittels Pendel

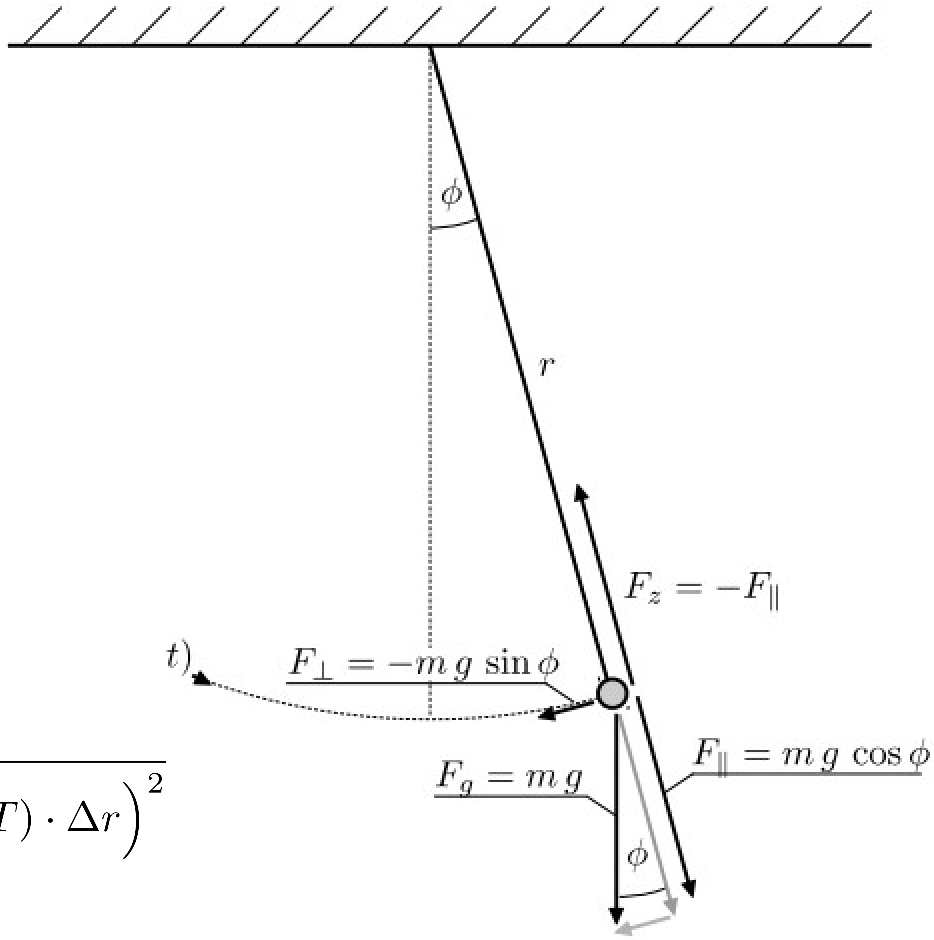
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{g(r,T) = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$$

$$\Delta g(r,T) \ = \sqrt{\Big(\partial_T g(r,T)\cdot\Delta T\Big)^2 + \Big(\partial_r g(r,T)\cdot\Delta r\Big)^2}$$

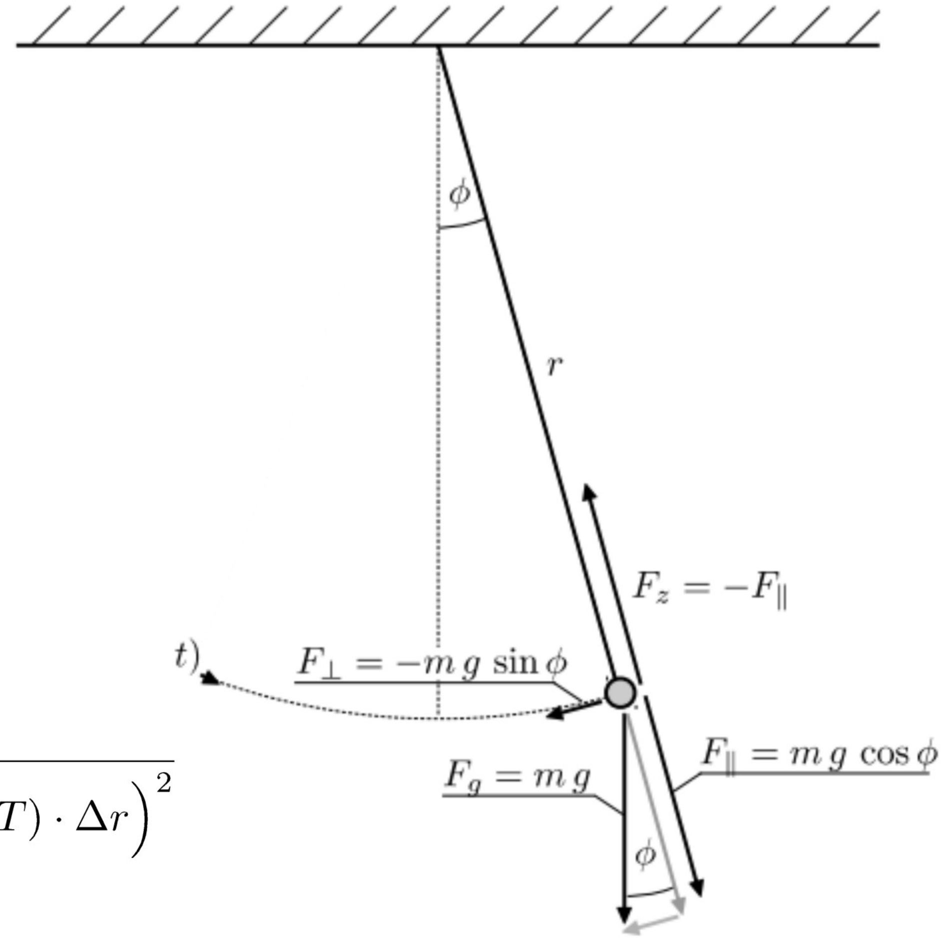
$$\partial_T g(r,T) = -\frac{8\pi^2 r}{T^3} = -2\,\frac{g(r,T)}{T}$$

$$\partial_r g(r,T) \ = \ \frac{4\pi^2}{T} = \frac{g(r,T)}{r}$$



Messung der Erdbeschleunigung mittels Pendel

Wie würden Sie die Messung durchführen?



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{g(r,T) = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$$

$$\Delta g(r,T) = \sqrt{\Big(\partial_T g(r,T)\cdot\Delta T\Big)^2 + \Big(\partial_r g(r,T)\cdot\Delta r\Big)^2}$$

$$\partial_T g(r,T) = -\frac{8\pi^2 r}{T^3} = -2\,\frac{g(r,T)}{T}$$

$$\partial_r g(r,T) = \frac{4\pi^2}{T} = \frac{g(r,T)}{r}$$

Priv. Doz. Dr. Roger Wolf
http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/

Tafelanschrieb

Fragen zum Nachdenken…

- **Zu Folie 3:**
  Auf Folie 6 wird die Bewegung auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit zu Recht auch als gleichförmig bezeichnet. Tatsächlich erfährt der Körper auf der Kreisbahn fortwährend eine Beschleunigung. Wie würden Sie das II. Newtonsche Axiom auf Folie 3 genauer formulieren?

- **Zu Folie 8:**
  Bei der Formulierung der Schwingungsgleichung haben wir die Masse auf der rechten und linken Seite der Gleichung gekürtzt. Auf der rechten Seite der Gleichung handelt es sich dabei um die (schwere) Masse des Körper, die von der Erde angezogen wird. Um welche Masse handelt es sich genau auf der linken Seite der Gleichung und woher nehmen Sie die Gewissheit, dass die Massen auf beiden Seiten der Gleichung identisch gleich sind?

- **Zu Folie 8:**
  Zum III. Newtonschen Axiom: im Beispiel von Fall-2 ist die Fadenzugkraft F_{z} geringer, als im Beispiel von Fall-1. Wenn Sie genauer darüber nachdenken ändert sie sich sogar als Funktion der Winkels ϕ. Können Sie sich erklären, wie es passieren kann, dass der Faden immer gerade genug Kraft aufwindet, um die Masse bei konstantem Radius auf der Kreisbahn zu halten?

- **Zu Folie 9:**
  Wieviele Lösungen glauben Sie gibt es für die Schwingungsgleichung und wie wird eine konkrete Lösung aus diesem Raum bestimmt?